有限鏡映群の不変式と孤立特異点のFlat Coordinate System (不変式論とその周辺)

矢野, 環

数理解析研究所講究録
444巻 1981年 209-235

有限鏡映群の不変式と
孤立特異点のflat coordinate system*

埼玉大学理学部 矢野環

§0. はじめに　これは「"Weyl群の不変式" 齋藤恭司(数解研), 矢野環(埼玉), 関口次郎(都立), 加藤満生(琉球) 渡部敏(山形)」と題した講演の記録である.

有限鏡映群は、その不変式環が多項式環になること, 不変式の次数の積が群の位数であること, などがよく知られている。([2], [3], [5], [6]). 一方, 孤立特異点のA, D, E型とよばれるものが, まさにA, D, E型のLie環のnilpotent varietyの特異性に由来すること([28]), B, C, F, G型でも同様であること([29]), 又, それらの別の立場からの解釈([25], [26]) さらに, Coxeter群 H_3, H_4, $I_2(m)$ に対するそれらの対応する構成([36], [38]) なども明らかにされている。(表1, 2, 3, 4 参照)

そこで, 超曲面孤立特異点の理論から, 上述の対応関係をたどって, 有限鏡映群の性質を見なおしてみることができる。特に我々は, 有限Coxeter群の不変式環の生成元を, uniqueに指定しうる方法を見出した。([32], [33], [34]). これは, A, D, E型特異点のversal deformationのparameter space

* この論説の目次は最後 p.20 にある.

に，ある "linear structure" を導入するものと理解され([35] [36])，現在，一般の孤立特異点に対しての理論が整備されつつある．(K. Saito, On the periods of primitive integrals の一部分，などがその周期の理論を含む予定)．特に単純楕円型特異点においては，上述の "linear structure" (deformation の parameter space の flat coördinate system とよぶ) の存在は，齋藤により非線型一階微分方程式の形にまとめられていたが，矢野はそれを線型化し，古典的な楕円函数を係数にもつ flat coördinate system が確定した。この線型化に用いる手法は，佐藤幹夫等による τ-函数の理論との類似をうかがわせ，齋藤は特異点の変形の τ-函数を定義している。

さて，有限鏡映群にもどって，複素鏡映群 (u.g.g.r.) を考察しよう。それらは [5] ですでに分類されていたが，興味ある状況で登場したのは，[14][ ] ではないかとおもわれる。[14] は Weyl 群に特別な形で embed される u.g.g.r. を分類し，[ ] では graded Lie algebra の "Weyl 群" が u.g.g.r. になることを示した。Coxeter 群の場合と同様に，不変式を deformation の parameter space とみなす試みは表4 になされた。又，Brieskorn-Slodowy 流の formulation も近々完成する予定である。[5] において定義された invariants $\{n_1, \dots, n_\ell\}$ は，u.g.g.r. の reflecting hyperplanes が寺尾の意味で free arrangement をなす

ことより定まる logarithmic vector fields の weights と一致する([31]). u.g.g.r. の discriminant の特異性から定まる不変量 H を矢野が定義し，寺尾は又 log. vec. f. から $2n/l$ という量の重要性を指摘し，それらと既知の不変量との奇妙な関係が知られている.(表5). しかしそれらの関係は，[15] における奇妙な duality と同じく，分類結果にもとづいた推論であり，現在理論的整備が行なわれつつある。

以下において，上記の概説に関し，紙数の許すかぎり説明を加えてみたい。

§1. 有限鏡映群の不変式環

G : 有限群　　k : 体　，$ch(k) \nmid |G|$ ($|G|$は G の位数. 以下では $k \simeq \mathbb{R}, \mathbb{C}$ しか必要としないが，これが最もひろい条件である).

$V \simeq k^l$　，　$\rho : G \to GL(V)$　faithful linear rep.

以下では　$G \subset GL(V)$　とみなす.　V^*を　V の dual space とし，V^* の symmetric algebra $S(V^*)$ の G-不変部分環を，

$$R = S(V^*)^G \quad \text{とする.} \quad (= k[V^*]^G)$$

R は Cohen-Macaulay であり，Hochster-Eagon Amer. J. Math (1971), Dade (1971) によれば，次が成立する.

<u>Theorem</u> 1.1　$\exists P_1, \ldots, P_l \in R$, algebraically independent homogeneous elements, $\deg P_i \mid |G|$, $\{P_i\}$: R-sequence , and $\exists Q_1, \ldots, Q_\delta \in R$ s.t.　$R = \bigoplus_{i=1}^{\delta} Q_i k[P_1, \ldots, P_l]$.

Definition 1.2. $\delta(G) = \min\{\delta \mid \text{such } \delta \text{ as in Thm 1.1}\}$.

Corollary 1.3 $|G| = \prod \deg P_i / \delta(G)$ （$|G|$はGの位数）

特に $\delta(G) \leq |G|^{l-1}$ //

Remark 1.4. Huffman Sloane, Adv in Math (197) によれば, 評価 $\delta(G) \leq |G|^{l-1}$ が漸近的に best possible であること, $\delta(G)$ の大きくなるものの具体的例などがのべられている。

Definition 1.5 ① $g \in GL(V)$ が reflection（鏡映）であるとは、g は semi-simple であり, $\mathrm{rank}(1-g) = 1$ となること.

（order $g = 2$ とは仮定しない,

② $\mathrm{Ker}(1-g) = H_g$ を g の reflecting hyperplane と呼ぶ.

（$\exists L$, $V = L \oplus H_g$, L上に g は原始 ord g 乗根で作用する.
これは明らかなことではなく, 一般の場合 Maschke の定理を要する）

Theorem 1.6 （例えば Bourbaki Lie環 4.5.6章の Ch V no 5.5 Th. 4）

G は reflection で生成される $\Longleftrightarrow$ $\delta(G) = 1$.

（即ち, Th.1.1 Cor 1.3 より $R \simeq k[P_1, \ldots, P_l]$, $|G| = \prod \deg P_i$）. //

この定理の $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ の場合は [3][5] によりなされた. 尚しばしば Chevalley の定理とよばれるが, [6] は一般的な証明を与えただけであり, 何事かをつけ加えたものではなく, 不適当な呼び名であるとおもわれる。[6] では reflection を order 2 にかぎっているが, 証明は一般の order で適用される。

Weyl 群の不変式環で $R \simeq k[P_1, \ldots, P_l]$ $\prod \deg P_i = |G|$ は [2] にある.

小 なくとも $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ を $\mathrm{ch}\, k = 0$ に拡げたとはいえる.

__Theorem__ 1.7. (Coxeter-Shephard-Todd) $k=\mathbb{R}, \mathbb{C}$ の場合，鏡映で生成される有限群は次の list の群の直積である.

① $k=\mathbb{R}$, ([3]) a. A_ℓ, D_ℓ, E_6, E_7, E_8 (versal def)

(__Coxeter群__) b. B_ℓ, F_4, G_2. ("versal" def)

c. H_3, H_4, $I_2(p)$ $p=5, p\geq 7$. (free def)

② $k=\mathbb{C}$ ([5]) a. $G(r,1,\ell)$, $G(r,r,\ell)$, No. 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 14, 16,

(__u.g.g.r.__) 17, 18, 20, 21, 24, 25, 26, 27, 29, 32, 33, 34.

b. $G(r,p,\ell)$ $2\leq p$ r, 7, 11, 12, 13, 15, 19, 22, 31. /

__Remark__ 1.8 ① Th. 1.6 より V/G (schemeとして) $\simeq k^\ell$ であり，その座標環が R となっている。Th. 1.7 ① においては，V/G は G の対応する type の deformation の parameter space となる。① a. では A, D, E 型 versal deformation ① b. ではある意味で "versal" な def ① c. は free deformation. a. b. は Weyl 群として知られている。

② Th. 1.7 ② において，a. の群は ℓ (次元) 個の鏡映で生成され，24, 27 以外は complex polytope の対称群である. b. では $\ell+1$ 個の鏡映で生成され，complex polytope の対称群となるのは $G(r,p,\ell)$ と 31 である。(講演のとき言いまちがえたらしい) //

§ 2. Flat generator system

Coxeter 群の不変式環の生成元 $P_1, \cdots, P_\ell$ に unique な指定の方法がある. これを *flat generator system* と呼ぶ. この *flat* という言葉は, *flat* connection と関係があるだろう

うということ，$\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}} V/G$ に linear structure を与えるので，"平坦"といってよいであろう，というので齋藤により命名された。しかし，この用語に異論もあるので，将来代わるかもしれない。

仮定：以下 G は既約，すなわち V への作用は既約と仮定。$V^* \simeq \mathbb{R}^l$ に G-不変正定値内積が定数倍をのぞき unique に存在する。これを $(\ |\ )$ と記そう。（何かとって G 上で平均すればよい。既約であるからそれしかない）...

$$(dP|dQ) = \sum_{ij} \frac{\partial P}{\partial \xi_i} \frac{\partial Q}{\partial \xi_j} (\xi_i|\xi_j)$$

と定義する。ここで dP は P の外微分，$\xi_1, \dots, \xi_l$

Definition 2.1. R の homogeneous generator system $P_1, \dots, P_l$ が *flat* であるとは，$L = \sum_{i=1}^{l} \mathbb{R} P_i$ とおくとき，① $D\cdot(d\cdot|d\cdot) : R \times R \longrightarrow R$, $D = \partial/\partial P_l$, $\deg P_1 \le \cdots \le \deg P_l$ を L に制限すると，$\mathbb{R}$-valued であり，② L 上の non-degenerate bilinear form を与えることを言う。

Theorem 2.2. flat generator system は存在し，L は unique である。//

この定理は初め [32] において，A, B, D, E_6, F_4, G_2, H_3, H_4, $I_2(p)$ に対して証明した。方法は，[18] [19] [20] などで決定してあった不変式環の具体的構造（[22] にまとめて出る）を用いて実際に構成し，さらに uniqueness は一般的に示すものであった。

その後 [35] により E_7, E_8 も含めた $\overbrace{\text{証明}}^{\text{一般的}}$ ができた. 又, $\overbrace{\text{具体的}}^{E_7, E_8 \text{での}}$ 構成も [33] [34] においてなされている。

<u>Example</u> 2.3. $I_2(p)$. (order $2p$ の dihedral group).

$V^* = \mathbb{R}\xi_1 + \mathbb{R}\xi_2$, $\{\xi_1, \xi_2\}$ orthonormal basis とする. $u = \xi_1 + \sqrt{-1}\,\xi_2$ とおけば $x_2 = u\bar{u}$ $(= \xi_1^2 + \xi_2^2)$, $x_p = (\sqrt{-1})^p (u^p + (-\bar{u})^p)$ が R の生成元である. $(dx_2 | dx_2) = 4x_2$, $(dx_2 | dx_p) = 2p\,x_p$, $(dx_p | dx_p) = 4p^2 x_2^{p-1}$ となり, x_2, x_p が flat generator system である.

(念のため. 2つの鏡映は $u \to -\bar{u}$, $u \to \exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{p}\right)\bar{u}$ である)

<u>Example</u> 2.4 A_ℓ ($\ell+1$ 次対称群)

$V^* = \sum_{i=1}^{\ell+1} \mathbb{R}\xi_i \Big/ \mathbb{R}\left(\sum_{i=1}^{\ell+1} \xi_i\right)$ に, $\xi_i \mapsto \xi_{\sigma(i)}$ $\sigma \in \mathfrak{S}_{\ell+1}$ を作用する。(V が $\sum \mathbb{R}e_i$ の中の $\xi_1 + \cdots + \xi_{\ell+1} = 0$ で定まる ℓ次元空間になる).

$\overbrace{p_i}^{i=2,\cdots,\ell+1}$ を $\xi_1, \cdots, \xi_{\ell+1}$ の i 次基本対称式 (modulo $p_1 = \sum \xi_i$) とする.

記号 $P_i^d = \sum_{\substack{i_1 + \cdots + i_d = i \\ 2 \le i_j \le \ell+1}} p_{i_1} \cdots p_{i_d}$ と定め, さらに $\alpha \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$

$$(1 + cP)_i^\alpha = \sum_{d \ge 0} \binom{\alpha}{d} c^d P_i^d \quad \text{という略記法を用いる。}$$

$$\left(又, \log(1 + cP)_i = \sum_{d \ge 1} \frac{(-c)^d}{d} P_i^d \quad \text{と定める}\right)$$

$$\boxed{x_i = \frac{\ell+1}{i-1}(1 + P)_i^{\frac{1}{\ell+1}(i-1)}} \quad i = 2, \cdots, \ell+1$$

が flat generator system を与える。これは逆にとけば,

$$\boxed{\begin{cases} P_i = \dfrac{\ell+1}{\ell+1-i}\left(1 - \dfrac{1}{\ell+1}X\right)_i^{-(\ell+1-i)} & i = 2, \cdots, \ell \\[2ex] P_{\ell+1} = -(\ell+1)\log\left(1 - \dfrac{1}{\ell+1}X\right)_{\ell+1} & \end{cases}}$$

となる. 略記法は P と同様.

この略記法は、斎藤が A, B, D 型の flat generator system を構成したときに採用したものだが、当初は評判が悪かった。しかし後に §3 で見るように、この略記法は極めて有効である。尚、$(dx_i | dx_j)$ を x_i の式として explicit に書き下す公式はまだ見つけていない。

我々は flat coordinate system を構成したとき、Coxeter 群の不変式環の basis の unique な指定の方法は今までなかって、我々の方法が初めてだとおもっていた。しかし、[11] に、特別な調和函数として unique に指定する方法が与えられていた。さらに関口は Weyl 群に対して、もう一種類 unique な指定の方法があることを指摘した (§3 Definition 3)。都合 3 通りの方法があることになる。

§3. Brieskorn-Slodowy 理論, Kostant の generator system.

この § ではいわゆる $\overbrace{\text{B-S 理論}}^{\text{Th. 3.8}}$ を説明し、特異点の理論との関係を示す。さらに、関口によって定義された、Kostant 流の R の生成元のとり方について説明する。

(3.1) $\mathfrak{g}$: simple Lie algebra $/\mathbb{C}$, G: $\mathfrak{g}$ の adjoint group

(この § では G は鏡映群ではない. $W(G)$ が今までの G にあたる)

$\mathfrak{h}$: $\mathfrak{g}$ の a Cartan subalgebra, $l = \mathrm{rank}\,\mathfrak{g}$ $(= \dim \mathfrak{h})$

$W(G)$: $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の Weyl 群 (A, B, D, E, F, G 型の Coxeter 群)

$Z_{\mathfrak{g}}(X)$: $X \in \mathfrak{g}$ の centralizer, $\mathfrak{g}^*, \mathfrak{h}^*$: それぞれの dual space

$X\in\mathfrak{g}$ は $\mathrm{ad}(X); Y\mapsto [X,Y]$ が semisimple, nilpotent に応じて, X が semisimple, nilpotent と呼ばれる。

$\mathcal{N}(\mathfrak{g}) = \{X\in\mathfrak{g} \mid X: \text{nilpotent}\}$.

<u>Theorem</u> 3.2 (Chevalley) canonical surjection $S(\mathfrak{g}^*)\to S(\mathfrak{h}^*)$ は algebra isomorphism $S(\mathfrak{g}^*)^G \xrightarrow{\sim} S(\mathfrak{h}^*)^{W(G)}$ を induce する。

<u>Definition</u> 3.3 Invariant morphism (又は adjoint quotient)

$\chi: \mathfrak{g}\longrightarrow \mathfrak{h}/W(G)$ は次の様に定義される.

$\mathfrak{g}\ni X = X_s + X_n$ を semi-simple, nilpotent part とするとき, ($[X_s,X_n]=0$)

$X\mapsto X_s\longmapsto GX_s\cap\mathfrak{h}\longmapsto (GX_s\cap\mathfrak{h})/W(G)$ (これは一点である)

<u>Remark</u> 3.4 χ は具体的には $\mathfrak{h}/W(G)$ の座標環 $S(\mathfrak{h}^*)^{W(G)} \simeq \mathbb{C}[P_1,\dots,P_\ell]$ より定められればよい. P の G-不変性より $P(X_s)$ ($= P(gX_s)$ $\exists g\in G$ $gX_s\in\mathfrak{h}$) は一意的な意味をもつので

$$\mathfrak{g}\ni X\longmapsto \chi(X) = (P_1(X_s),\dots,P_\ell(X_s))\in\mathfrak{h}/W(G).$$

<u>Theorem</u>-<u>Definition</u> 3.5 (Kostant-Steinberg-Dynkin)

① $X\in\mathcal{N}(\mathfrak{g})$ に対し, $\dim Z_{\mathfrak{g}}(X) - \operatorname{rank}\mathfrak{g}$ は非負偶数.

② $\{X\in\mathcal{N}(\mathfrak{g}) \mid \dim Z_{\mathfrak{g}}(X)=\ell\}$ ($\{X\in\mathcal{N}(\mathfrak{g})\mid \dim Z_{\mathfrak{g}}(X)=\ell+2\}$) は空でない単一 G-orbit となる. 各元を regular (subregular) nilpotent element と呼ぶ.

<u>Definition</u> 3.6 $X\in\mathfrak{g}$ の G-orbit $G\cdot X$ の tangent space の補空間を S とする. $\mathfrak{g} = \overset{=\{[X,Y]\mid Y\in\mathfrak{g}\}}{T_X(G\cdot X)}\oplus S$. このとき $X+S=S_X$ を X における $G\cdot X$ の transversal slice と呼ぶ. 特に

S を Killing form に関する直交補空間にとった場合，orthogonal slice と呼ぶ．（$X \in \mathcal{N}(\mathfrak{g})$ のとき TDS (X,Y,H) により $X + Z_{\mathfrak{g}}(Y)$ が orthogonal slice）（Jacobson-Morozov

Theorem 3.7. (Kostant) X_0: regular nilpotent

S_{X_0}: orthogonal slice $\Rightarrow \chi|_{S_{X_0}} : S_{X_0} \simeq \mathfrak{h}/W(G)$ biholomorphic //

（これは，$\forall X \in \mathfrak{g}$, $\operatorname{codim} GX = l \overset{(特に X\in S_{X_0} のとき OK)}{\Rightarrow} GX \cap S_{X_0} = \{1pt\}$ より）．

Theorem 3.8 ([28], [29]). X_0: subregular nilpotent

S_{X_0}: transversal slice $\chi|_{S_{X_0}} : S_{X_0} \longrightarrow \mathfrak{h}/W(G)$.

① $\chi^{-1}_{S_{X_0}}(0) = S_{X_0} \cap \mathcal{N}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の type と同じ type の rational double point と locally biholomorphic.（即ち $\mathfrak{g}$ が A 型なら A 型 rat. double）

② $t \in \mathfrak{h}/W(G)$ に対し，$\chi^{-1}_{S_{X_0}}(t)$ は ①でのべた rational double pt. の (versal) deformation に locally biholomorphic. //

表1 (p.) に rational double points の表をあげた．B_l, C_l, F_4, G_2 型の rational double pt とはそれぞれ $A_{2l-1}, D_{l+1}, E_6, D_4$ 型に等しい．~~である~~ (versal) deformation も表1，表2にある．尚，適当な slice をとれば，global に isomorphic にできる(①②とも)．

さて，Th. 3.7 の状況を詳しく見てみよう．X_0 を regular nilpotent, $\{X_0, H_0, Y_0\}$ を principal S-triple とすれば，$ad(H_0)$ の $Z_{\mathfrak{g}}(Y_0)$ での固有値は $-(2d_i-1)$ $i=1,\dots,l$ $d_i=\deg P_i$ である．この固有ベクトルを u_i とすれば，$Z_{\mathfrak{g}}(Y_0)=\sum \mathbb{C}u_i$．

従って，$S_{X_0} \ni X_0 + \sum q_i u_i \longmapsto (P_1(q), \dots, P_l(q)) \in \mathfrak{h}/W(G)$ が biholomorphic なることより，$S(\mathfrak{h}^*)^{W(G)} \simeq \mathbb{C}[q_1, \dots, q_l]$ と思える．

<u>Definition</u> 3.9 ([30]) $\{q_1, \cdots, q_\ell\}$ を不変式環の Kostant 流生成元の系とよぶ.（構成より $\sum \mathbb{C} q_i$ は unique に定まる.）

<u>Example</u> 3.10. A_ℓ. (Example 2.4 参照).

$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ とればたしかに regular nilpotent.

orthogonal slice は $\left\{ X_q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & 0 \\ q_2 & 0 & -1 & & \\ q_3 & q_2 & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ q_{\ell+1} & \cdots & q_3 & q_2 & 0 \end{pmatrix} \right\} \in X_0 + \sum q_i \cdot i \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

invariant morphism は $\det(\lambda + X) = \sum_{i=0}^{\ell+1} p_i(X) \lambda^{\ell+1-i}$ による

~~例~~ $X \longmapsto (p_1(X), \cdots, p_\ell(X))$ として与えられている.

$$\det(\lambda + X_q) = \sum_i (1-Q)_i^{-(\ell+2-i)} \lambda^{\ell+1-i} \qquad (\text{Remark } 3.11)$$

より $\boxed{p_i = (1-Q)_i^{-(\ell+2-i)}}$ である. ここで Example 2.4 と同様の略記法を用いた. $Q_i^d = \sum q_{i_1} \cdots q_{i_d}$ $\quad i_1 + \cdots + i_d = i \quad 2 \leq i_j \leq \ell+1$.

この表示が 2.4. における p_i の表示をあたかも X について微分し, $X = (\ell+1)Q$ とおいたものであることに気付くであろう. 実際, 我々が flat generator system を構成した直後, 岩堀先生は,「我々の $\{x_i\}$ が上記 $\{q_i\}$ と同じものではないか？」と問題にされた. 同じではないのだが, よく似ている。

<u>Remark</u> 3.11 上記 $\boxed{}$ を示しておく. ただの計算だが.

$GL(\infty)$ の generic element A の固有値を $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$, $\sum_j |\varepsilon_j| < \infty$ とする

$\sigma_j(A) = \sum_{i=1}^{\ell+1} \varepsilon_i^j \ (j \geq 1)$, $\bar{p}_j(A) = \chi_{\left.\boxed{\vdots}\right\}j}(A) = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{\ell+1})$ の j 次基本対称式 $(j \geq 0)$

$q_j(A) = \chi_{\underbrace{\boxed{\cdots}}_{j}}(A) = \sum \varepsilon_{i_1} \cdots \varepsilon_{i_j}$ $(j \geq 0)$ とおく.

$$\exp\left(-\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \frac{t^j}{j}\right) = \sum_{h=0}^{\infty} (-)^h \bar{p}_h t^h = \left(\sum_{j=0}^{\infty} q_j t^j\right)^{-1} \text{ である.}$$

従って、 $\sum(-)^h \bar{p}_h t^h = \sum_{j\geq 0} (-)^j (g_1 t + g_2 t^2 + \cdots)^j$

$$= \sum_j \sum_k \sum_d (-)^j \binom{j}{k} Q_d^{j-k} g_1^{\,k} t^{k+d}$$

$$= \sum_h (-)^h \Big(\sum_{k=0}^{h} (-)^k (1+Q)_k^{-(h-k+1)} g_1^{\,h-k} \Big) t^h$$

一方よく知られているように、

$$\bar{p}_h = \chi_{\text{目}\}h} = \det \begin{vmatrix} g_1 & 1 & & 0 \\ g_2 & g_1 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ g_h & \cdots & g_2 & g_1 \end{vmatrix} = \sum_{k=0}^{l+1} (-)^k (1+Q)_k^{-(l+2-k)} \lambda^{l+1-k}$$

従って、$h=l+1$ととって、 $g_1 = \lambda$とおけば、少し符号をかえて所用の式をうる。

<u>Remark</u> 3.12 表1より A_lの versal deformation は

$$x^{l+1} + t_2 x^{l-1} + t_3 x^{l-2} + \cdots + t_{l+1}.$$

Thm 3.8 により、実は t_i は基本対称式 p_iと同一視される。従って、 Ex 3.10 より $x^{l+1} + \sum_{i\geq 2} (1-Q)_i^{-(l+2-i)} x^{l+1-i}$ が $\{g_i\}$座標を用いた deformation の式である。又、flat coördinate x_i (Ex 2.4) に対し、 $\frac{1}{l+1} x_i = s_i$ とおけば次式をうる。

$$\frac{1}{l+1} x^{l+1} + \sum_{2}^{l} (1-S)_i^{-(l+1-i)} \frac{x^{l+1-i}}{l+1-i} - \log (1-S)_{l+1}$$

$$\sum_{h\geq 0} \Big(\sum_{i=0}^{h} (1-Q)_i^{-(h+1-i)} x^{h-i} \Big) t^h = \sum \det \begin{pmatrix} x & -1 & & 0 \\ g_2 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ g_h & \cdots & g_2 & x \end{pmatrix} t^h = (1 - g(t) - xt)^{-1}$$

$$g(t) = \sum_{j\geq 2} g_j t^j$$

(この式は前から分かっていた)

又、 $\sum_{h\geq 1} \Big(\sum_{i=0}^{h-1} (1-S)_i^{-(h-i)} \frac{x^{h-i}}{h-i} - \log (1-S)_h \Big) t^h = -\log (1 - s(t) - xt) \qquad s(t) = \sum_{j\geq 2} s_j t^j$

即ち、 $-\log (1 - xt - s(t))$ を展開し、 t^{l+1}の係数をとれば A_l型 sing. の versel deformation が flat coördinates $\{s_2 \cdots s_{l+1}\}$ によって表示されている。 ($(ds_i \mid ds_{l+1-j}) = -\delta_{i,j} s_{l+1}$ for A_l)

即ち，$\boxed{\exp\left(-\sum_{\ell\geq 0}\widetilde{F}_{A_\ell}(x,s)\frac{t^{\ell+1}}{\ell+1}\right) = 1 - xt - s(t)}$ $\quad s(t)=\sum_{j\geq 2} s_j t^j$

同様にして，

$$\left(\sum_{\ell\geq 1}\widetilde{F}_{B_\ell}(x,s)\frac{t^{2\ell}}{2\ell} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+xt-s(t)}{1-xt-s(t)}\right) \quad s(t)=\sum_{j\geq 1} s_{2j}t^{2j}\right.$$

$$\left.\coth\left(\sum\widetilde{F}_{B_\ell}(x,s)\frac{t^{2\ell}}{2\ell}\right) = 1-xt-s(t).\right.$$

$$s(t)=\sum_{j\geq 1} s_{2j}t^{2j}$$

$$\left(\sum_{\ell\geq 1}\widetilde{F}_{C_\ell}(x,y,s)\frac{t^{2\ell}}{2\ell} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sqrt{x}t-s(t)}{1-\sqrt{x}t-s(t)}\right) - xy^2\log\frac{1+t}{1-t}\right.$$

$$\sum\widetilde{F}_{D_{\ell+1}}(x,y,s)\frac{t^{2\ell}}{2\ell} = \sum\widetilde{F}_{C_\ell}(x,y,s)\frac{t^{2\ell}}{2\ell} + 2y\sum s'_{\ell+1}\frac{t^{2\ell}}{2\ell}.$$

により $\left(\begin{array}{l}\text{B D 型 Weyl群の flat generator system}\\ \text{B, D, C 型 deformation での flat coordinate}\end{array}\right)$ が得られる。

次の形の命題が得られていることに注意せよ。(この頁最上の式と p.11 最下の式)

__Proposition__ 3.13. $(-1)\times(\ell+1)$ 乗和 $-(\varepsilon_1^{\ell+1}+\cdots+\varepsilon_{\ell+1}^{\ell+1})$ を $\chi_{\square}, \chi_{\square\square}, \cdots, \chi_{\underbrace{\square\cdots\square}_{\ell+1}}$ の函数として表示せよ。その式において，$x=-\chi_{\square}$, $s_i=-\chi_{\underbrace{\square\cdots\square}_{i}}$ を代入した式 $\widetilde{F}_{A_\ell}(x,s)$ が A_ℓ 型の versal deformation の flat coordinate による表示である。あるいは，$(-)^\ell\sum\varepsilon_i^{\ell+1}$ を基本対称式 $p_1, p_2, \cdots$ により表示し，$x=p_1$, $s_i=(-)^{i-1}p_i$ とおいたものも同じく $\widetilde{F}_{A_\ell}(x,s)$ を与える。

__Example__ 3.14 $\quad \sigma_1=p_1$, $\sigma_2=p_1^2-2p_2$, $\sigma_3=p_1^3-3p_2p_1+3p_3$

$\sigma_4=p_1^4-4p_2p_1^2+4p_3p_1+2p_2^2-4p_4$ これより，

$$\widetilde{F}_{A_1}=x, \quad \frac{1}{2}\widetilde{F}_{A_2}=\frac{x^2}{2}+s_2, \quad \frac{1}{3}\widetilde{F}_{A_3}=\frac{x^3}{3}+s_2x+s_3$$

$$\frac{1}{4}\widetilde{F}_{A_4}=\frac{x^4}{4}+s_2x^2+s_3x+s_4+\frac{1}{2}s_2^2.$$

要するに，flat generators は A_ℓ 型の場合，$\frac{1}{\ell+1}\sum\varepsilon_i^{\ell+1}$ を基本対称式で表示した時，p_1^i $0\leq i\leq \ell-1$ の係数に表われる。

*

§ 4 Flat coördinate system, Free deformation

(4.1) $f: \mathbb{C}^{n+1},0 \longrightarrow \mathbb{C},0$ を isolated sing point 0 をもつ holomorphic function. $\widetilde{F}: \mathbb{C}^{n+1}\times S,0 \longrightarrow \mathbb{C},0$ を f の unfolding で parameter space $(S,0)$ $\dim S = m$ をもつものとする.

$(\mathbb{C}^{n+1},0)$, $(S,0)$ の local coordinate を $(x_0,\dots,x_n)$; $(t_1,\dots,t_m)$ とし, 次の条件をみたす $\widetilde{F}$ のみを考える.

(4.1.1) $\widetilde{F}: \mathbb{C}^{n+1}\times S,0 \longrightarrow \mathbb{C},0$ holomorphic

(4.1.2) $\widetilde{F}|_{\mathbb{C}^{n+1}\times\{0\},0} = f$

(4.1.3) $\partial\widetilde{F}/\partial t_m\,(x,t) \equiv c_m \neq 0$.

(4.1.4) $\{\partial\widetilde{F}/\partial t_i\,(x,0)\}_{1\le i\le m}$ は $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1},0}/(\partial f/\partial x_0,\dots,\partial f/\partial x_n)$ で一次独立.

これより,
$$\begin{cases} \widetilde{F}(x,t) = F(x,t') + c_m t_m, & t' = (t_1,\dots,t_{m-1}) \\ \dfrac{\partial F}{\partial t_i}(0,0) = 0, & i = 0,\dots,m-1 \end{cases}$$
と表示される. さらに, (4.1.1)~(4.1.4) をみたす他の座標系 $(s_1,\dots,s_m)$ については, 次式が成立する.

定数
$$\frac{\partial s_i}{\partial t_m} = 0 \quad 1\le i\le m-1, \qquad \frac{\partial s_m}{\partial t_m} = c \ (\neq 0)$$

適当に代表をとり, $X = \{(x,t) \mid \widetilde{F}(x,t) = 0\}$, $S = \{(t)\}$, $T = \{(t')\}$ とおき, map φ, p を次式で定める.

$$\varphi: X \to S \qquad (x,t') \longmapsto \left(t', -\frac{1}{c_m}F(x,t')\right)$$
$$p: S \to T \qquad (t',t_m) \longmapsto (t')$$

Definition 4.2 1. $\Omega_\varphi = \varphi_*\left(\Omega_X^{n+1}\Big/\sum_{i=1}^{m-1} dt_i\wedge\Omega_X^n + dF\wedge\Omega_X^n\right)$

2. $\Omega_{\varphi,T}$: $e_i = \left[\dfrac{\partial\widetilde{F}}{\partial t_i}(x,t)\,dx_0\wedge\cdots\wedge dx_n\right]$ $i = 1,\dots,m$ が Ω_φ 内

で生成した $\mathcal{O}_T$-submodule（座標系のとり方にはよらない）

Definition 4.3 ([36]) unfolding $X \to S$ が **free** であるとは、$\Omega_{\varphi,T}$ が $\mathcal{O}_S$-module になっており、$\mathcal{O}_T$-free rank m であること。（$X \to S$ が versal であれば free である（齋藤））。

Ω_φ の2元 $f_i = [g_i(x,t)dx]$ $i=1,2$ に対して、$X \to T$ によった residue symbol により内積を定める（齋藤）

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \mathrm{Res}_{X/T}\begin{pmatrix} g_1(x,t)\,g_2(x,t)\,dx \\ \frac{\partial F}{\partial x_1}, \ \cdots, \ \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_T.$$

Definition 4.4 rational double point の free deformation $X \to S \to T$ が与えられたとき、S の local coördinate system $(t_1, \cdots, t_m)$ が **flat** であるとは、次の条件がみたされることをいう。（存在すれば下記 L は unique）

$L = \sum \mathbb{C} e_i \subset \Omega_{\varphi,T}$, $e_i = [\frac{\partial F}{\partial t_i} dx]$ $i = 1, \cdots, m$ とおくと

$\langle\ ,\ \rangle : L \times L \to \mathcal{O}_T$ は定数値非退化である。

（これは versal の時の定義を free deformation の拡張した定義である）

Theorem 4.5 ([36]) τ を Coxeter group の type とする。このとき、"τ 型の free deformation" $X \to S$ が存在し、次をみたす。

1. $X \to S$ の $\underset{\{t \in S \mid \varphi^{-1}(t) \text{ は singular}\}}{\overset{\|}{\text{discriminant set}}}$ は τ 型 Coxeter 群の discriminant と biholomorphic.
2. flat coördinate system が存在し、τ 型の flat

generator system と同一視される. //

この構成は「Coxeter system の folding」の理論によりなされる. 表 3 に H, I 型の pre deformation を, flat coördinate system (s) による表示でしるす.

<u>Definition</u> 4.6 Coxeter system (W, S) が Coxeter system (W', S') に <u>fold</u> される (記号で $(W,S) \curvearrowright (W', S')$) とは:

$S = \bigsqcup S_i$ と分割があり, $s_i' =$ (S_i が W で生成した部分群の長さ最大の元) (存在しないときは id. とする) とおき, $\Sigma' = \{s_i' \mid s_i' \neq id\}$. Σ' の生成した W の部分群を W'' とするとき, (W'', Σ') が Coxeter system であり $(W'', \Sigma') \simeq (W', S')$. さらに, $\forall i$, S_i の任意の2元が可換のとき, orthofolding と呼ぶ.

<u>Theorem</u> 4.7 ① 既約有限 Coxeter 系の ortho folding は下記でつくされる. 1. root 系の folding の induce するもの (i.e., $A_{2\ell-1} \curvearrowright B_\ell$, $D_{\ell+1} \curvearrowright C_\ell$, $E_6 \curvearrowright F_4$, $D_4 \curvearrowright G_2$.

2. 2つの exceptional なもの $D_6 \curvearrowright H_3^{(\pm)}$, $E_8 \curvearrowright H_4$.

3. Perfect folding $W \curvearrowright I_2(h(W))$ ここに $h(W)$ は W の Coxeter #.

② $W \overset{\text{ortho}}{\curvearrowright} W'$ のとき, W の標準表現空間 V に部分空間 $\exists V'$ があり, W' は V' に標準表現で作用している. ∴

$S(V^*)^{W'} \simeq S(V^*)^{W} / (V'$上 0 となる不変式$)$ //.

従って, orthofolding $W \curvearrowright W'$ により, W 型 deformation の parameter space S_W の subspace $S_{W'}$ が定まる.

これにより unfolding $X_W \to S_W$ を ひきもどし, $X_{W'} \to S_{W'}$ を得るが, これが W' 型の free deformation (unfolding) である

$$\begin{tikzcd}
 & X_{W'} \arrow[rr, hook] \arrow[dd] & & X_W \arrow[dd] \\
V' \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "/W'"'] & & V \arrow[dr, "/W"'] & \\
 & S_{W'} \arrow[rr, hook] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & & S_W \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] \\
 & L_{W'} \arrow[rr, hook] & & L_W
\end{tikzcd}$$

Proposition 4.8 上述のもとで, flat coördinate system の定める linear subspace を L_W, $L_{W'}$ とすれば, 内積をこめて $L_{W'} \hookrightarrow L_W$ は linear embedding である.

Example 4.9 E_6 の flat coördinate system (s_i) (F_4).

$$\tilde{F}_{E_6}(x,s) = x^4 + y^3 + s_2x^2y + s_5xy + \left(s_6 - \frac{1}{24}s_2^3\right)x^2 + \left(s_8 + \frac{1}{4}s_2s_6 - \frac{1}{576}s_2^4\right)y$$
$$+ \left(s_9 - \frac{1}{12}s_2^2s_5\right)x + s_{12} - \frac{1}{24}s_2^2s_8 + \frac{1}{8}s_6^2 - \frac{1}{288}s_2^3s_6 - \frac{1}{24}s_2s_5^2$$

$\tilde{F}_{F_4}$ は $s_5 = s_9 = 0$ とおけばよい.

Example 4.10 E_7 の flat coördinate system (s_i) ([33])

$$t_2 = s_2,\ t_5 = s_5,\ t_6 = s_6 - \frac{4}{9}s_2^3,\ t_8 = s_8 - \frac{4}{3}s_2s_6 + \frac{1}{9}s_2^4,\ t_{10} = s_{10}$$

$$t_{12} = s_{12} - s_2s_{10} - \frac{5}{6}s_2^2s_8 - \frac{5}{6}s_6^2 + \frac{5}{9}s_2^3s_6 - \frac{1}{3^4}s_2^6$$

$$t_{14} = s_{14} - \frac{1}{3}s_2s_{12} - \frac{1}{3}s_6s_8 + \frac{1}{18}s_2^3s_8 + \frac{1}{6}s_2s_6^2 - \frac{1}{54}s_2^4s_6$$

$$t_{18} = s_{18} - \frac{1}{3}s_2^2s_{14} - \frac{2}{3}s_6s_{12} - s_8s_{10} + \frac{4}{3}s_2s_6s_{10} - \frac{1}{9}s_2^4s_{10} - \frac{1}{3}s_2s_8^2$$
$$+ \frac{1}{3}s_2^2s_6s_8 + \frac{4}{27}s_6^3 - \frac{1}{9}s_2^3s_6^2 + \frac{1}{2\cdot 3^4}s_2^6s_6 + \frac{109}{2\cdot 3^9}s_2^9.$$

但し

$$\tilde{F}_{E_7}(x,t) = -\frac{1}{3}(x^3y + y^3) + t_2xy^2 + t_6y^2 + t_8xy + t_{10}x^2 + t_{12}y + t_{14}x + t_{18}.$$

Example 4.11 E_8 の flat coörd. ([34]).

$$\tilde{F}_{E_8}(x,t) = -\left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}y^3\right) + t_1x^3y + t_4x^2y + t_6x^3 + t_7xy + t_9x^2 + t_{10}y + t_{12}x + t_{15}.$$

$$t_1 = s_1,\ t_4 = s_4 - 2s_1^4,\ t_6 = s_6 - 2s_1^2s_4 + \frac{6}{5}s_1^6,\ t_7 = s_7 - 2s_1s_6 - \frac{2}{3}s_1^3s_4 + \frac{19}{15}s_1^7$$

$$t_9 = s_9 - \frac{3}{2} s_1^2 s_7 - s_1^3 s_6 - \frac{3}{2} s_1 s_4^2 + \frac{23}{5} s_1^5 s_4 - \frac{28}{15} s_1^9$$

$$t_{10} = s_{10} - s_1 s_9 - \frac{1}{2} s_1^3 s_7 - s_4 s_6 + \frac{3}{2} s_1^4 s_6 + \frac{1}{2} s_1^2 s_4^2 - \frac{2}{15} s_1^6 s_4 - \frac{11}{45} s_1^{10}$$

$$t_{12} = s_{12} - s_1^2 s_{10} - \frac{4}{3} s_1^3 s_9 - 2 s_1 s_4 s_7 + \frac{12}{5} s_1^5 s_7 - s_6^2 + 2 s_1^2 s_4 s_6 - \frac{7}{30} s_1^6 s_6$$
$$- \frac{1}{3} s_4^3 + \frac{7}{3} s_1^4 s_4^2 - \frac{107}{30} s_1^8 s_4 + \frac{82}{75} s_1^{12}$$

$$t_{15} = s_{15} - s_1^3 s_{12} - s_1 s_4 s_{10} + \frac{4}{5} s_1^5 s_{10} - s_6 s_9 + \frac{7}{15} s_1^6 s_9 - \frac{1}{2} s_1 s_7^2 + \frac{1}{2} s_1^2 s_6 s_7$$
$$- \frac{1}{2} s_4^2 s_7 + \frac{5}{3} s_1^4 s_4 s_7 - \frac{29}{30} s_1^8 s_7 + \frac{1}{2} s_1^3 s_6^2 + \frac{1}{2} s_1 s_4^2 s_6 - \frac{43}{30} s_1^5 s_4 s_6$$
$$+ \frac{14}{45} s_1^9 s_6 + \frac{1}{3} s_1^3 s_4^3 - \frac{43}{45} s_1^7 s_4^2 + \frac{421}{450} s_1^{11} s_4 - \frac{103}{450} s_1^{15}. \quad \lrcorner$$

H_4 の flat coordinate は $s_4 = s_7 = s_9 = s_{12} = 0$ とおけばよい.

§ 5. n.g.g.r. (ユニタリー鏡映群)

n.g.g.r. は Thm 1.7 ② で分類されている.

不変式環の生成元の次数を $d_1 \le d_2 \le \cdots \le d_\ell = h$, $m_i = d_i - 1$.

discriminant を不変にする logarithmic vector field $X_1, \dots, X_\ell$ の weight $+1$ を $n_1 \le n_2 \le \cdots \le n_\ell$ とする.

Theorem 5.1 ([15]) $n_\ell < h-1 \Leftrightarrow m_i + n_{\ell+1-i} = h \Leftrightarrow$ ℓ 個の鏡映で生成されている. //

discriminant の reduced な定義式を $D=0$ とし, この次数 (weight $(d_1, \dots, d_\ell)$ ではかったもの) を d とする.

$$\frac{1}{d} \sum_{i=1}^{\ell} d_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{H(G)}$$

により $H(G)$ を定義する. (斉藤)

Theorem 5.2. 1. $H(G)$ は自然数である.

2. $H(G) \le \max\{h, n_\ell + 1\}$.

3. $H(G) = \max\{h, n_\ell + 1, H(G)\} \Leftrightarrow G$ は order 2 の鏡映で生成される

寺尾宏明は $t=\frac{2}{\ell}\sum n_i$ について次の事実を見出した.

<u>Theorem</u> 5.3　1. t は自然数である.

2. $t=h$ or $n_\ell+1$.

この2つについては, 次の同値がある. (つまり, ($t=H$ と $H=h$ or $n_\ell+1$ で maximal) がだいたい同値)

<u>Proposition</u> 5.4　1. $t=H \Rightarrow H=h$ or $n_\ell+1$. かつ No.3 以外ではこのとき H は maximal.

2. $H=h \Rightarrow t=H$ かつ $G(6,2,2)$ 以外ではこのとき H は maximal

3. $H=n_\ell+1 \Rightarrow t=H$ かつ No.3 以外では H は maximal

以上の <u>Thm</u> 5.1, 5.2, 5.3, <u>Prop</u> 5.4 はすべて分類にもとづいて示されている. 不変量 $h, n_\ell+1, H, t$ は表5にまとめてある. (Coxeter 群ではすべて等しい.)

さて, Vinberg [ ] において graded Lie Algebra の "Weyl grp" を定義しており, u.g.g.r になっている。それは表4で第2行目に0をつけたものと, No.13 である。又, 表4に対応する deformation (i.e., discriminant set 同士が biholo) を記した.

u.g.g.r. について幾何にも色々興味あることがあるが、又の機会にゆずる.

§6. <u>Flatto の不変式</u>

G を Coxeter 群 V^* の orthonormal basis を $\xi_1,\cdots,\xi_\ell$ とする. G を既約とし, $P_1(\xi),\cdots,P_\ell(\xi)$ を次の方式で定める.

<u>Definition</u> 6.1.　1. $P_1(\xi)=\xi_1^2+\cdots+\xi_\ell^2$

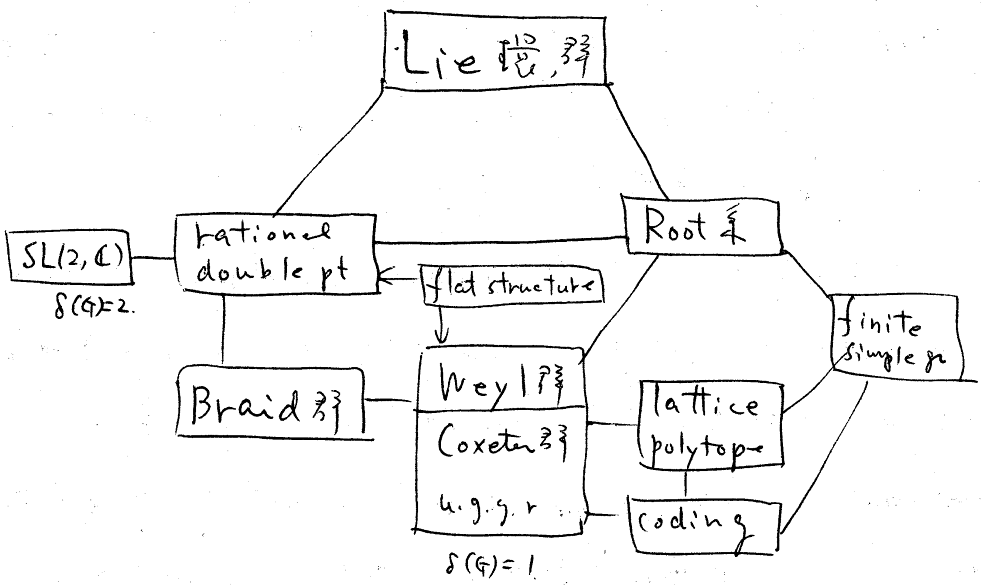
2. $\{P(\xi) \mid P_i(\frac{\partial}{\partial\xi})P(\xi)=0 \quad i=1,\cdots,k\}$ の basis を

$P_{k+1}(\xi)$, ($P_{\frac{\ell}{2}}(\xi)$ and $P_{\frac{\ell}{2}+1}(\xi)$ if $G=D_\ell$ ($k=\frac{\ell}{2}-1$, ℓ: even)) とする。

<u>Theorem</u> 6.2 ([11]) Definition 6.1 の方法により, $F=\sum_{i=1}^{\ell}\mathbb{C}P_i$ は unique に定まる.

<u>Remark</u> 6.3 $P_i(\xi)$ $i\geq 2$ は定義より調和多項式である. 具体的に決定するのは極めてめんどうであるが, この $P_i(\xi)$ が flat invariants と一致するのは $\ell=2$ の場合のみと思われる

§7. 概観



目次.

$$f_{A_\ell} = x^{\ell+1} + yz, \quad f_{D_\ell} = x^{\ell-1} - xy^2 + z^2,$$
$$f_{E_6} = x^4 + y^3 + z^2, \quad f_{E_7} = x^3y + y^3 + z^2,$$
$$f_{E_8} = x^5 + y^3 + z^2.$$

$$\tilde{F}_{A_\ell} = f_{A_\ell} + \sum_{i=2}^{\ell+1} t_i x^{\ell+1-i}, \qquad \tilde{F}_{D_\ell} = f_{D_\ell} + \sum_{i=1}^{\ell-1} t_{2i} x^{\ell-1-i} + 2t'_\ell y,$$

$$\tilde{F}_{E_6} = f_{E_6} + t_2x^2y + t_5xy + t_6x^2 + t_8y + t_9x + t_{12},$$

$$\tilde{F}_{E_7} = f_{E_7} + t_2xy^2 + t_6y^2 + t_8xy + t_{10}x^2 + t_{12}y + t_{14}x + t_{18},$$

$$\tilde{F}_{E_8} = f_{E_8} + t_2x^3y + t_8x^2y + t_{12}x^3 + t_{14}xy + t_{18}x^2 + t_{20}y + t_{24}x + t_{30}.$$

表1. rational double points とその versal deformation.

B_ℓ	$f_{A_{2\ell-1}} + t_2x^{2\ell-2} + t_4x^{2\ell-4} + \cdots + t_{2\ell}$
C_ℓ	$f_{D_{\ell+1}} + t_2x^{\ell-1} + t_4x^{\ell-2} + \cdots + t_{2\ell}$
F_4	$f_{E_6} + t_2x^2y + t_6x^2 + t_8y + t_{12}$
G_2	$x^3 + y^3 + t_2xy + t_6$ (D_4 の sub)
BC_ℓ	$f_{A_{2\ell}} + t_2x^{2\ell-1} + t_4x^{2\ell-3} + \cdots + t_{2\ell}x$

表2 ADE 以外の root 系に対応する deformation.

H_3
$$f_{D_6} + s_2x^4 + \frac{7}{20}s_2^2x^3 + \left(s_6 + \frac{1}{20}s_2^3\right)x^2 + \left(\frac{3}{10}s_2s_6 + \frac{1}{400}s_2^4\right)x + \left(s_{10} + \frac{1}{100}s_2^2s_6 + \frac{1}{50000}s_2^5\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}s_6y.$$

H_4
$$-\left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}y^3\right) + s_2x^3y - 2s_2^4x^2y + \left(s_{12} + \frac{6}{5}s_2^6\right)x^3 + \left(-2s_2s_{12} + \frac{19}{15}s_2^7\right)xy + \left(-s_2^3s_{12} - \frac{28}{15}s_2^9\right)x^2 + \left(s_{20} + \frac{3}{2}s_2^4s_{12} - \frac{11}{45}s_2^{10}\right)y + \left(-s_2^2s_{20} - s_{12}^2 - \frac{7}{30}s_2^6s_{12} + \frac{82}{75}s_2^{12}\right)x + s_{30} + \frac{4}{5}s_2^5s_{20} + \frac{1}{2}s_2^3s_{12}^2 + \frac{14}{45}s_2^9s_{12} - \frac{103}{450}s_2^{15}.$$

$I_2(2k+1)$ $\quad f_{A_{2k}} + \sum_{j=1}^{k} \frac{(2k+2-2j,\, j-1)}{j!\,(2k+1)^{j-1}} s_2^{\,j} x^{2k+1-2j} + s_{2k+1}$

$I_2(2k)_A$ $\quad f_{A_{2k-1}} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(2k+1-2j,\, j-1)}{j!\,(2k)^{j-1}} s_2^{\,j} x^{2k-2j} + s_{2k} + \frac{s_2^{\,k}}{k(2k)^{k-1}}$

$I_2(2k)_D$ $\quad f_{D_{k+1}} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(2k+1-2j,\, j-1)}{j!\,(2k)^{j-1}} s_2^{\,j} x^{k-j} + s_{2k} + \frac{s_2^{\,k}}{k(2k)^{k-1}}$

$I_2(12)_E$ $\quad f_{E_6} + s_2 x^2 y - \frac{1}{24} s_2^{\,3} x^2 - \frac{1}{576} s_2^{\,4} y + s_{12}$

$I_2(18)_E$ $\quad -\frac{1}{3}(x^3 y + y^3) + s_2 x y^2 - \frac{4}{9} s_2^{\,3} y^2 + \frac{1}{9} s_2^{\,4} x y - \frac{1}{81} s_2^{\,6} y + \frac{179}{2\cdot 3^9} s_2^{\,9}$

$I_2(30)_E$ $\quad -\frac{1}{5}(x^5 + y^3) + s_2 x^3 y - 2 s_2^{\,4} x^2 y + \frac{6}{5} s_2^{\,6} x^3 + \frac{19}{15} s_2^{\,7} x y - \frac{28}{15} s_2^{\,9} x^2$
$\quad - \frac{11}{45} s_2^{\,10} y + \frac{82}{75} s_2^{\,12} x + s_{30} - \frac{103}{450} s_2^{\,30}$

表3. H, I 型の free deformation

			discriminant.
$G(r,1,\ell)$	∘	$f_{A_{r\ell}} + t_r x^{r(\ell-1)} + t_{2r} x^{r(\ell-2)} + \cdots + t_{\ell r}$	B_ℓ
$G(r,2,\ell)$	∘	$f_{D_{\frac{r\ell}{2}}} + t_r x^{\frac{r}{2}(\ell-1)-1} + \cdots + t_{r(\ell-1)} x^{\frac{r}{2}-1} + 2t'_{\frac{r\ell}{2}} y$	$t'\Delta_\ell(1, t_r, \cdots, t_{r(\ell-1)}, t'^2)$
~~No.4~~ $[\ ]^r$		$f_{A_{r-1}} + t_r$	A_1
No. 4	∘	$x^3 + y^3 + t_4 x + t_6$	A_2
5	∘	$f_{E_6} + t_6 x^2 + t_{12}$	B_2
8		$f_{E_6} + t_8 y + t_{12}$	A_2
16	∘	$f_{E_8} + t_{20} y + t_{30}$	A_2
20		$f_{E_8} + t_{12} x^3 + \frac{1}{5} t_{12}^{\,2} x + t_{30}$	$I_2(5)$
25	∘	$f_{E_6} + t_6 x^2 + t_9 x + t_{12}$	A_3
26	∘	$f_{E_7} + t_6 y^2 + t_{12} y + t_{18}$	C_3
32	∘	$f_{E_8} + t_{12} x^3 + t_{18} x^2 + t_{24} x + t_{30}$	A_4
31	∘	$f_{E_8} + t_8 x^2 y + t_{12} x^3 + t_{20} y + t_{24} x$	(補題)

9	$f_{F_8} + t_8 x^2 y + t_{24} x$	G_2
10	$f_{E_8} + t_{12} x^3 + t_{24} x$	B_2
12	$f_{E_6} + t_6 x^2 + t_8 y + \frac{1}{8} t_6^2$	$(t_8/3)^3 + (t_6/4)^4$
22	$f_{E_8} + t_{12} x^3 + t_{20} y + \frac{1}{5} t_{12}^2 x$	$(t_{20}/3)^3 - (t_{12}/5)^5$

表4 u.g.g.r. に対応する deformation

No.	h	$n_\ell+1$	H	No.	type	h	$n_\ell+1$	H	$2h/\ell$	bd	
3	r	2	$= 2$ $t \neq 2$	23	H_3	10	10	10	10	•	
4	6	4	3	24	·	14	12	14	14		
5	12	8	4	25	·	12	8	4	8	•	
6	12	10	6	26	·	18	14	6	14	•	
7 ×	12	14	6	27	·	30	26	30	30		
8	12	6	3	28	F_4	12	12	12	12	•	
9	24	18	6	29	·	20	18	20	20		
10	24	14	4	30	H_4	30	30	30	30	•	
11 ×	24	26	6	31	×	24	$30 = 30$		30	•	
12	8	12	$= 12$	32	·	30	20	5	20	•	
13 ×	12	18	$= 18$	33	·	18	16	18	18		
14	24	20	8	34	·	42	38	42	42		
15	24	26	10	35	E_6	12	12	12	12	•	
16	30	12	3	36	E_7	18	18	18	18	•	
17	60	42	6	37	E_8	30	30	30	30	•	
18	60	32	4	1	A_ℓ	$\ell+1$	$\ell+1$	$\ell+1$	$\ell+1$	•	
				$G(r,1,\ell)$	•	ℓr	$(\ell-1)r+2$	2ℓ	$(\ell-1)r+2$	•	$r \geq 2$
19 ×	60	62	6	$G(6,2,2)$	×	6	8	6	8	•	
20	30	20	5	$G(r,2,\ell)$	×	$(\ell-1)r$	$(\ell-1)r+2$	$4(\ell-1)+2$	$(\ell-1)r+2$	•	$r \geq 6$
21	60	50	10	$G(r,r/2,\ell)$	×	$(\ell-1)r$	$(\ell-1)r+2 =$	$(\ell-1)r+2$	$(\ell-1)r+2$	$(\ell=2)$	$r \geq 4$
22 ×	20	30	$= 30$	$G(r,p,\ell)$	×	$(\ell-1)r$	$(\ell-1)r+2$	$2(\ell-1)p+2$	$(\ell-1)r+2$	$(\ell=2)$	$3 \leq p < \frac{r}{2}$
				$G(r,r,\ell)$	•	$(\ell-1)r$	$(\ell-2)r+2$	$(\ell-1)r$	$(\ell-1)r$	$(r=2)$	$\ell \geq r \geq 2$
						$(\ell-1)r$	$(\ell-1)(r-1)+1$	$(\ell-1)r$	$(\ell-1)r$	or $(\ell=2)$	$2 \leq \ell < r$

表5 u.g.g.r. の色々な invariants

Classical works

[1] F.Brioschi: Sulla risoluzione delle equozioni di quinto grado, Annali di Math.,SerI,1(1858), 256-259.

[2] G.Racah: Sulla caratterizzazione dello rappresentazioni..., Rend.Circ.Mat.Palermo,8(1950),108-113.

[3] H.S.M.Coxeter: The product of generators of a finite groups generated by reflections, Duke Math.,18(1951),765-782.

[4] J.S.Frame: The classes and representations of the groups of 27 lines and 28 bitangents, Annali di Math.,32(1951),83-119.

[5] G.C.Shephard and J.A.Todd: Finite unitary reflection groups, Can.J.Math.,6(1954),274-304.

[6] C.Chevalley: Invariants of finite groups generated by reflections, Amer.J.Math.,77(1955),778-772.

[7] A.J.Coleman: The Betti numbers of the simple groups, Canad. J.Math., 10(1958),349-356.

[8] R.Steinberg: Finite reflection groups, Trans.Amer.Math. Soc., 91(1959),493-504.

[9] " : Invariants of finite reflection groups, Canad.J. Math.,12(1960),616-618.

[10] L.Solomon: Invariants of finite reflection groups, Nagoya M.J.,22(1963),57-64.

Nowadays

[11] L.Flatto: Invariants of finite reflection groups and mean value problems II, Amer.J.Math.,92(1970),552-561.

[12] R.P.Stanley: Relative invariants of finite groups generated by pseudoreflections, J.Alg.,49(1977),134-148.

[13] L.Flatto: Invariants of finite reflection groups, L'Enseignement math., 24(1978),237-292.

[14] T.A.Springer: Regular elements of finite reflection groups, Inventiones Math.,25(1974),159-198.

[15] P.Orlik and L.Solomon: Unitary reflection groups and Cohomology, Inventiones Math.,59(1980),77-94.

Logarithmic vector fields

[16] K.Saito: Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields, J.Fac.Sci.Univ.Tokyo, (1980),

[17] V.I.Arnold: Wave front evolution and equivalent Morse lemma, Commu.P.Appl.Math.,29(1976),557-582.

[18] Yano T.,Sekiguchi J.: Coxeter groups ni fuzui suru weighted homogeneous polynomial no microlocal structrue (with an Appendix on GL(2)), RIMS Kokuroku 281, 1975,40-105.

[19] J.Sekiguchi and T.Yano: The algebra of invariants of the Weyl groups $W(F_4)$, Sci.Rep.Saitama Univ.Ser.A 9(1979),21-32.

[20] J.Sekiguchi and T.Yano: A note on the Coxeter group of type H_3, Sci.Rep.Saitama Univ.Ser.A 9(1079),33-44.

[21] T.Yano and J.Sekiguchi: Microlocal structrue of weighted homogeneous polynomials associated with finite Coxeter groups, I, Tokyo J.Math. 2(1979),193-220.

[22] " and " : " ,II, Tokyo J.Math. (1981), to appear.

[23] T.Yano: On a generator system of $W(E_7)$ invariant ring, to appear.

[24] A.B.Guivental': Displacement of invariants of groups that are generated by reflections and are connected with simple singularities of functions, Functional Anal.Appl.14 (1980), 81-89.

Singularities, Lie algebras

[25] V.I.Arnold: Normal forms of functions near defenerate critical points, the Weyl groups A_k, D_k, E_k and the Lagrangean singularities, Functional Anal.Appl.6(1972),3-25.

[26] " : Critical points of functions on a manifold with boundary , the simple Lie groups B_k,C_k,F_4 and singularities of the evolutes, Uspehi Mat.Nauk 33(1978),91-105.

[27] " : Indices of singular points of 1-forms on a manifold with boundary, displacement of invariants of groups, generated by reflection and sungular points of projections of smooth surfaces, Uspehi Mat.Nauk 34(1979),3-38.

[28] E.Brieskorn: Singular elements of semi-simple algebraic groups, Actes Congres Intern.Math. 1970, t.2,279-284.

[29] P.Slodowy: Simple singularities and simple algebraic groups, Lecture Note in Math., 815

[30] J.Sekiguchi: logarithmic vector fields along the discriminant set of a Weyl group, submitted to J.Math.Soc.Japan.

[31] H.Terao: Free arrangement of hyperplanes,

Flat coördinate system

[32] K.Saito,T.Yano and J.Sekiguchi: On a certain generator system of the ring of invariants of a finite reflection group, Comm. in Algebra 8(1980),373-408.

[33] T.Yano: Flat coördinate system of type E_7, to appear in Proc. Japan Acad.

[34] M.Kato and S.Watanabe: Flat coördiante system for the versal deformation of rational double point of type E_8, to appear.

[35] K.Saito: On a linear structure of a quotient variety by a finite reflection group, Preprint RIMS-288, Res.Ins.Math.Sci. Kyoto Univ., accepted with proviso by Commun. in Algebra.

[36] T. Yano: Free deformations of isolated singularities, Sci. Rep.Saitama Univ.Ser A 9(1980),61-70.

[37] T.Yano and M.Kato: Free deformations of simple elliptic singularities, Sci.Rep.Saitama Univ.Ser A 9(1980),71-79.

[38] T.Yano: Deformation of isolated singularities and folding of Coxeter systems, in preparation.

[39] T.Yano: Deformation s of rational double points associated with unitary reflection groups, Sci.Rep.Saitama Univ.Ser A 10(1981).